تكامل التوابع المثلثية

قوانين عامة:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

تحويل جداء إلى مجموع:

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$

طريقة الأولى:

1 $\int (\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x)\, dx$

الطريقة العامة لحسابه هو رده إلى تكامل كسري وذلك لتغيير النسب المثلثية

نفرض $\tan\frac{x}{2}$ $\tan\frac{x}{2}$ يساوي t فيكون $x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

ثم نستبدل النسب المثلثية بقيمتها حسب المساواة:

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

- $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\cos x + 1 - 1}{1+\cos x} dx$

(★) $\int dx - \int \frac{dx}{1+\cos x} \Rightarrow I_1 = \int \frac{dx}{1+\cos x}$ (★')

نفرض $t = \tan\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = \arctan t \rightarrow x = 2\arctan t$

$\rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \longrightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

حل (★')

$I = 2\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$

$= \frac{2}{2}\int dt = t + c = \tan\frac{x}{2} + c$

نعوض في ★

$I = x - \tan\frac{x}{2} + c$

>> حالة 2 <<

$\int \sin qx \cos px . dx$
$\int \cos qx . \cos px . dx$
$\int \sin qx . \sin px . dx$

$\Rightarrow$ في هذه الحالة نحول من جداء إلى مجموع حسب دساتير التحويل

مثال:

$$\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 2x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 8 - \frac{1}{2}\sin 2x\right] + C$$

حالة 3 « ت » تكامل الأشكال التالية:

$$\int f(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x)\, dx$$

$$\int f(\tan^{n} x)\, dx$$

$$\int f(\cot^{n} x)\, dx$$

أي إذا بدلنا كل sin بـ sin- وكل cos بـ cos- يبقى التكامل كما هو ← في هذه الحالة نفرض $t = \tan x$

$$x = \arctan t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\tan^2 x = t^2$$

مثال:

$$\int \tan^3 x \, dx$$

$$\tan x = t \Rightarrow x = \arctan \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$t^3 \div (t^2+1) = t, \quad t^3 - (t^3 + t) = -t$$

$$= \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \left(t - \frac{2t}{2(1+t^2)}\right) dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C$$

مثال

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$\tan x = t \qquad x = \arctan t$

$dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \quad , \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$

$$\Rightarrow = \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{\frac{1+t^2+1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + c$$

الحالة ٤ « ثاً » التكامل من الشكل:

$\sin^n x \cdot \cos^r x \cdot dx$

إذا كان r,n عدد فردي

إذا كان n أو r عدد فردي فمثلاً ليكن n عدد فردي

$$\int \sin^{n-1} x \cdot \cos^r x \cdot \sin x\,dx$$

نفرض $t = \cos x \longrightarrow dt = -\sin x\,dx$

نكتب $\sin^{n-1} x$ بدلالة الـ $\cos x$ وبالتالي ينقلب التكامل إلى تكامل كثير الحدود

مثال:

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^7 x \cdot dx$$

$= \int \sin^6 x \cdot (\cos^2 x)^3 \cdot \cos x\,dx = \int \sin^6 x \cdot (1-\sin x)^3 \cdot \cos x\,dx$

نفرض $t = \sin x \,,\; dt = \cos x\,dt \qquad = \int t^6 (1-t^2)^3\,dt$ ← تكامل

احسب تكامل: $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

نضرب ب 4 ونقسم على 4:

$$= \frac{1}{4} \int 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (2 \sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2} \left(\cos 6x - \frac{1}{2} \cos 2x\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{16} \left[x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x \right] + C$$

تكاملات الدوال الجذرية (الدوال الصماء):

الحالة الأولى

حساب التكاملات من الشكل:

$$I = \int f(x, \sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x}, \sqrt[r]{x}) \, dx$$

لحساب التكاملات من هذا الشكل:

نكتب الجذور من الشكل:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}, \quad \sqrt[r]{x} = x^{\frac{1}{r}}$$

فالمقام المشترك للكسور $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{m}$ ، $\frac{1}{r}$ هو $n \cdot m \cdot r$

نفرض: $t = x^{\frac{1}{r \cdot m \cdot n}} \Leftarrow x = t^{n \cdot m \cdot r} \Leftarrow dx = nmr\, t^{nmr-1}$

ونعوض بالتكامل ونرد التكامل إلى الدالة الكسرية

مثال: احسب تكامل:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

انتباه: نكرر هذا التعريف أعطي في بعض الشعب ولم يعطى في الشعب الأخرى ستتم إيضاح بشكل مفصل عند إعطاءه لبقية الشعب.

الحالة 2: حساب التكاملات من الشكل:

$$I = \int f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+D}}\right) dx$$

نفرض: $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+D}}$

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+D}$$

ونعزل x من الشكل:

$$x = \frac{Dt^m - b}{a - ct^m} \Rightarrow dx = \left(\frac{Dt^m - b}{a - ct^m}\right)'$$

نعوض في التكامل فيرد التكامل إلى دالة كسرية.

مثال:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$$

انتباه: نكرر هذا التعريف أعطي في بعض الشعب ولم يعطى في الشعب الأخرى وسيتم إيضاح بشكل مفصل عند إعطاءه لبقية الشعب.

ملاحظة: بالنسبة للحالة 4 ←

عندما n+1 عدد زوجي نخفض الرتبة باستخدام القوانين:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

انتهت المحاضرة